



GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT
GÖTTINGEN

Physikalisches Praktikum

Versuch 1

Der Pohlsche Resonator

Praktikant: Nikolai Wyderka

Mitarbeiterin: Magdalena Albrecht

Datum: 30.05.2011

Gruppe: 8

Assistent: Steffen Bezold

Testiert:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	3
2.1	Die Bewegungsgleichung der freien Schwingung	4
2.2	Das Logarithmische Dekrement	4
2.3	Die Bewegungsgleichung der gekoppelten Schwingung	5
2.4	Die Resonanzfrequenz	6
2.5	Phasenverschiebung	7
3	Durchführung	7
3.1	Wirbelstrombremse	7
3.2	Versuchsdurchführung	8
4	Auswertung	9
4.1	Normierung	9
4.2	Eigenfrequenz, Logarithmisches Dekrement und Dämpfungskonstante	9
4.3	Ungedämpfte Eigenfrequenz	11
4.4	Resonanzgang	12
4.5	Phasenverschiebung	12
4.6	Vergleich zwischen theoretischen und experimentellen Werten	13
5	Diskussion	13
A	Anhang	15
A.1	Programmtext	15
A.1.1	Normierung	15
A.1.2	Gedämpfte Eigenfrequenzen, Logarithmisches Dekrement, Reibungskoeffizient und ungedämpfte Eigenfrequenz	15
A.1.3	Phasenverschiebung	18

1 Einleitung

Der Untersuchung erzwungener Schwingungen und der daraus resultierenden Phasenverschiebungen kommt in der Physik eine besondere Bedeutung zu. In vielen Bereichen tauchen diese Phänomene auf. Eine einfache Art der Untersuchung der auftretenden Effekte bietet der von ROBERT WICHARD POHL erfundene und nach ihm benannte *Pohlsche Resonator*. Mit ihm lassen sich erzwungene Schwingungen verschiedener Frequenz und Dämpfung untersuchen und auswerten.¹ Im Folgenden Versuch soll ein solcher Resonator genutzt werden, um die Abhängigkeit der Eigenfrequenz und der auftretenden Phasenverschiebung von der Dämpfung und der Erregerfrequenz zu bestimmen.

2 Theorie

Abbildung 1 zeigt den Aufbau des Resonators und dient als Veranschaulichung. Er besteht aus einer kupfernen Schwungscheibe (A), die an einer Spiralfeder (B) befestigt ist, die die Scheibe zurück in ihre Ausgangslage stellt. An der Winkelskala (C) kann die Elongation abgelesen werden. Über eine Kurbelwelle, die mit einem Schrittmotor (D) verbunden ist, kann eine erzwungene Schwingung erreicht werden. Eine Wirbelstrombremse (E) kann millimetergenau über dem Schwungrad justiert werden.

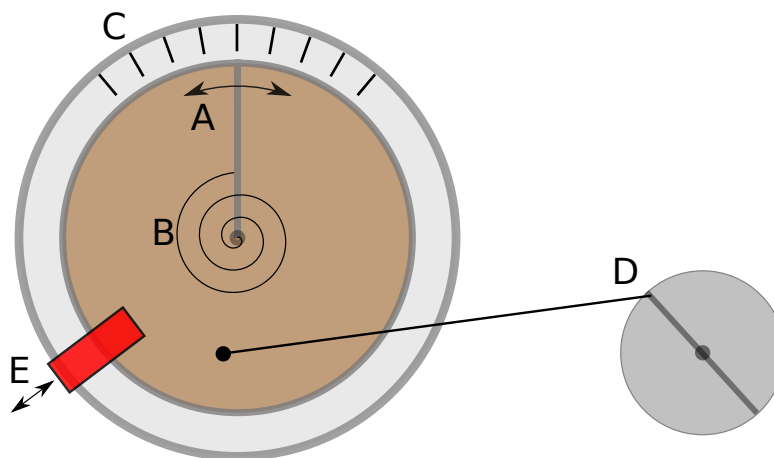


Abbildung 1: Schematischer Aufbau

¹Vgl. POHL, ROBERT O.: *Pohls Einführung in die Physik 1: Mechanik, Akustik und Wärmelehre*, Berlin 2009

2.1 Die Bewegungsgleichung der freien Schwingung

Wird das Schwungrad ohne den Schrittmotor, also ohne erzwungene Schwingung betrieben, so wirken zum Zeitpunkt t zwei Drehmomente auf das Rad: das rückstellende Moment der Spiralfeder mit Winkelrichtgröße D und das bremsende Moment der Wirbelstrombremse mit Proportionalitätsfaktor ρ . Man erhält so die homogene Bewegungsgleichung

$$D\varphi + \rho\dot{\varphi} + \Theta\ddot{\varphi} = 0$$

mit dem Trägheitsmoment Θ und der Auslenkung φ des Rades.

Zur Lösung wird ein einfacher Exponentialansatz $\varphi(t) = A \exp(\lambda t)$ benutzt. Man erhält als Lösung für den Fall $\left(\frac{\rho}{2\Theta}\right)^2 < \frac{D}{\Theta}$:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \exp\left(-\frac{\rho}{2\Theta}t\right) \cdot \exp\left(i\left(t\sqrt{\frac{D}{\Theta} - \left(\frac{\rho}{2\Theta}\right)^2} - \phi\right)\right) \quad (1)$$

mit der Startauslenkung φ_0 und einer Phasenverschiebung ϕ . Die anderen Fälle sind nur für große Reibungen relevant, die bei unserem Versuch jedoch nicht vorkommen.

Aus (1) lässt sich die Eigenfrequenz ω_e der Schwingung direkt als

$$\omega_e = \sqrt{\frac{D}{\Theta} - \left(\frac{\rho}{2\Theta}\right)^2}$$

ablesen. Man definiert der Übersicht halber $\beta := \frac{\rho}{2\Theta}$ und $\omega_0^2 = \frac{D}{\Theta}$, womit sich (1) vereinfacht zu

$$\varphi(t) = \varphi_0 \exp(-\beta t) \cdot \exp(i(t\omega_e - \phi)).$$

2.2 Das Logarithmische Dekrement

Bei der gedämpften Schwingung ist insbesondere das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Maxima von Bedeutung. Man erhält es direkt aus (1) als

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t)}{\varphi\left(t + \frac{2\pi}{\omega_e}\right)} &= \frac{\exp(-\beta t) \cdot \exp(i(t\omega_e - \phi))}{\exp(-\beta t) \cdot \exp\left(-\beta \frac{2\pi}{\omega_e}\right) \cdot \exp\left(i\left(\left(t + \frac{2\pi}{\omega_e}\right)\omega_e - \phi\right)\right)} \\ &= \exp\left(\beta \frac{2\pi}{\omega_e}\right) \cdot \frac{\exp(i(t\omega_e - \phi))}{\exp(i(t\omega_e + 2\pi - \phi))} \\ &= \exp\left(\beta \frac{2\pi}{\omega_e}\right). \end{aligned}$$

Das Logarithmische Dekrement Λ wird als Logarithmus dessen definiert:

$$\Lambda := \ln\left(\frac{\varphi(t)}{\varphi\left(t + \frac{2\pi}{\omega_e}\right)}\right) = \beta \frac{2\pi}{\omega_e}. \quad (2)$$

2.3 Die Bewegungsgleichung der gekoppelten Schwingung

Betrachten wir nun die inhomogene Form der Bewegungsgleichung, die die erzwungene Schwingung des Rades durch einen Erreger der Frequenz ω beschreibt:

$$D\varphi + \rho\dot{\varphi} + \Theta\ddot{\varphi} = M \cos(\omega t)$$

oder in äquivalenter Form unter der Verwendung der bisherigen Ausdrücke α und β sowie $N := \frac{M}{\Theta}$:

$$\omega_0^2\varphi + 2\beta\dot{\varphi} + \ddot{\varphi} = N \cos(\omega t). \quad (3)$$

Gelöst wird diese Differentialgleichung durch einen Kosinus-Ansatz der Form $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t - \phi) + C$ mit der Phasenverschiebung ϕ , der Startelongation φ_0 und einer noch zu bestimmenden Konstanten C .

Man erhält weiter $\dot{\varphi}(t) = -\varphi_0\omega \sin(\omega t - \phi)$ und $\ddot{\varphi}(t) = -\varphi_0\omega^2 \cos(\omega t - \phi)$. Eingesetzt in (3) folgt damit

$$\varphi_0\omega_0^2 \cos(\omega t - \phi) - 2\varphi_0\omega\beta \sin(\omega t - \phi) - \varphi_0\omega^2 \cos(\omega t - \phi) = N \cos(\omega t)$$

bzw.

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t - \phi) - 2\omega\beta \sin(\omega t - \phi) = \frac{N}{\varphi_0} \cos(\omega t). \quad (4)$$

Aus $\omega t = \frac{\pi}{2}$, wenn also der Erreger kein Moment auf das Schwungrad ausübt, erhält man

$$\begin{aligned} & (\omega_0^2 - \omega^2) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) - 2\omega\beta \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \frac{N}{\varphi_0} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \Rightarrow & (\omega_0^2 - \omega^2) \sin(\phi) = 2\omega\beta \cos(\phi) \\ \Rightarrow & \tan \phi = \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2}. \end{aligned}$$

Für $t = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 (\omega_0^2 - \omega^2) \cos(-\phi) - 2\omega\beta \sin(-\phi) &= \frac{N}{\varphi_0} \\
 \Rightarrow (\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\phi) + 2\omega\beta \sin(\phi) &= \frac{N}{\varphi_0} \\
 \Rightarrow \varphi_0 &= \frac{N}{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\phi) + 2\omega\beta \sin(\phi)} \\
 \Rightarrow \varphi_0 &= \frac{N}{(\omega_0^2 - \omega^2) \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \phi}} + 2\omega\beta \frac{\tan \phi}{\sqrt{1+\tan^2 \phi}}} \\
 \Rightarrow \varphi_0 &= \frac{N}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}.
 \end{aligned}$$

Setzt man dies beides zusammen mit $C = 0^2$ in den Ansatz ein, erhält man schließlich die vollständige spezielle Bewegungsgleichung

$$\varphi(t) = \frac{N}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cdot \cos\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \quad (5)$$

Die allgemeine Lösung ergäbe sich aus Addition von (5) zu (1). Da (1) aber für große t recht schnell gegen 0 strebt, ist dieser Term nur für den sogenannten Einschwingvorgang relevant, den man an der Überlagerung von (1) über (5) erkennt. Nachdem das System „eingeschwungen“ ist, beschreibt (5) den Verlauf sehr gut.

2.4 Die Resonanzfrequenz

Gleichung (5) zeigt, dass die Amplitude der Schwingung von der Erregerfrequenz ω abhängig ist. Die Resonanzfrequenz ω_r des Erregers ist genau dann erreicht, wenn die Amplitude maximal wird. Wir erhalten die Bedingung

$$\begin{aligned}
 &(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \quad \min \\
 \Leftrightarrow &\frac{\partial}{\partial \omega} (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 = 0 \\
 \wedge &\frac{\partial^2}{\partial \omega^2} (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 > 0
 \end{aligned}$$

²C beschreibt nur eine Verschiebung der Ruhelage des gesamten Schwungrades, diese kann jedoch immer auf 0 gesetzt werden

Wir erhalten daraus für ω

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & -4\omega (\omega_0^2 - \omega^2) + 8\beta^2 \omega = 0 \\ (\text{f. } \omega \neq 0) \Leftrightarrow & \omega^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2 \\ \Leftrightarrow & \omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \end{aligned}$$

Einsetzen der positiven Lösung (im Folgenden ω_r) in die zweite Ableitung bestätigt uns, dass

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \right|_{\omega=\omega_r} \\ &= -4 (\omega_0^2 - \omega^2) + 8\omega^2 + 8\beta^2 \Big|_{\omega=\omega_r} \\ &= -4\omega_0^2 + 4\omega_0^2 - 8\beta^2 + 8\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \\ &= 8\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} > 0 \end{aligned}$$

und damit die Amplitude für

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (6)$$

maximal wird.

2.5 Phasenverschiebung

Je nach Dämpfung und Anregung tritt eine Phasenverschiebung ϕ zwischen der Erregerphase und der Phase des Schwungrades auf. Sie lässt sich in (5) ablesen und beträgt

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Abbildung 2 zeigt schematisch die Verläufe der Funktion bei verschiedenen Dämpfungen. Entspricht die Anregerfrequenz der Eigenfrequenz, so beträgt die Phasenverschiebung unabhängig von der Reibung $\frac{\pi}{2}$.

3 Durchführung

3.1 Wirbelstrombremse

Die Wirbelstrombremse besteht aus einem Permanentmagneten, der Wirbelströme in das an ihm vorbeilaufende Rad induziert. Diese erzeugen ein dem äußeren Magnetfeld entgegengerichtetes Feld. Durch Ohmsche Widerstände im Metall kommt es

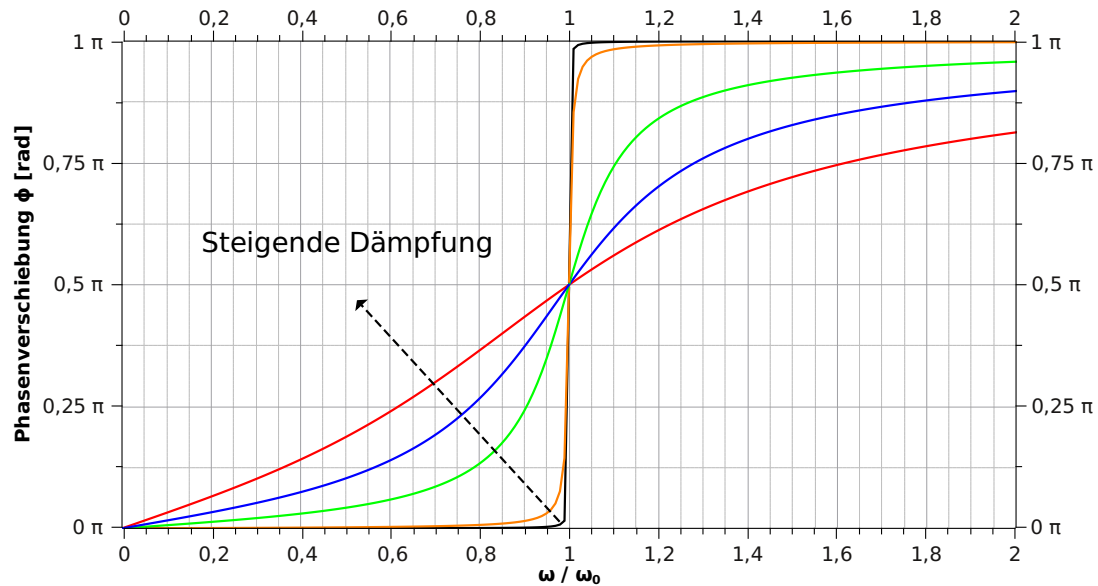


Abbildung 2: Phasenverschiebung in Abhängigkeit der Erregerfrequenz

zu einem Energieverlust und infolgedessen zu einer Bremswirkung, die zur Winkelgeschwindigkeit proportional ist. Die Stärke der Bremswirkung hängt dabei nahezu linear von der vom Magneten überdeckten Fläche ab.³

Im Fall des Pohlschen Resonators lässt sich die Bremse mit einem Millimetertrieb über das metallische Schwungrad bringen, weshalb im Folgenden auch alle Dämpfungen in mm angegeben werden.

3.2 Versuchsdurchführung

Der Aufbau ist in Kapitel 2 zu finden. Über den Computer kann die Erregerfrequenz eingestellt werden, die jedoch zunächst auf 0 gestellt wird, sodass das Schwungrad frei schwingen kann. Für die Stellungen $r = 0$ mm, 4 mm, 6 mm und 8 mm der Wirbelstrombremse wird das Schwungrad bis auf 120° aus der Ruhelage ausgelenkt und jeweils einige Perioden der freien Schwingung mit dem Computer erfasst.

Anschließend wird für die Dämpfungen $r = 4$ mm, 6 mm und 8 mm der Wirbelstrombremse jeweils für verschiedene Erregerfrequenzen der Schwingungsverlauf mit dem Computer erfasst. Es wird zunächst in 100 mHz-Schritten zwischen 100 mHz und 600 mHz gemessen, anschließend werden in der Nähe der Eigenfrequenz mehrere weitere Messungen durchgeführt. Dabei wird vor allem darauf geachtet, dass nach dem Ende des Einschwingvorgangs, das sich im Phasenraumdiagramm an einer

³Vgl. RECKNAGEL, ALFRED: *Physik. Elektrizität und Magnetismus*. Berlin 1980

Ellipsenform erkennen lässt, noch genügend Perioden aufgezeichnet werden.

4 Auswertung

4.1 Normierung

Zunächst wird aus den ermittelten Daten die Nulllage des Schwungrades bestimmt. Dazu werden alle erfassten Auslenkungen y_i über ganze Perioden aufsummiert und gemittelt. Man erhält als Abweichung \tilde{y} vom Nullpunkt etwa

$$\tilde{y} \approx 6$$

in einer durch die Erfassung der Auslenkung bedingten dimensionslosen Einheit.

Da die Aufzeichnung nur in ganzen Zahlen erfolgte, ist eine Normierung um eine nicht ganze Zahl wenig sinnvoll. Der dadurch entstehende Fehler geht mit in den allgemeinen Fehler der Auslenkungserfassung von $\sigma_y = 2$ ein.

Sämtliche Messwerte werden nun mit Programm A.1.1 um diesen Normierungswert korrigiert, sodass die Schwingungen um den Nullpunkt verlaufen.

Abbildung 3 zeigt die ersten Perioden der freien Schwingungsverläufe.

4.2 Eigenfrequenz, Logarithmisches Dekrement und Dämpfungskonstante

Für die freien Schwingungen wird nun die jeweilige Eigenfrequenz ω_e bestimmt. Dazu werden die zeitlichen Abstände Δt_i zwischen den Zeiten t_i und t_{i+1} der n Schwingungsmaxima und -minima mit Programm A.1.2 errechnet und gemittelt. Man erhält die Periodendauer

$$T = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta t_i.$$

Je nach Anzahl der Abstände ergibt sich der Fehler

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{1}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n-1} (\Delta t_i - T)^2}.$$

Daraus ergibt sich die Eigenfrequenz $\omega_e = \frac{2\pi}{T}$ mit

$$\sigma_\omega = \sqrt{\sigma_T^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial T} \right)^2} = \frac{2\pi}{T^2} \sigma_T.$$

Tabelle 1 listet die daraus errechneten Frequenzen für die verschiedenen Dämpfungen auf.

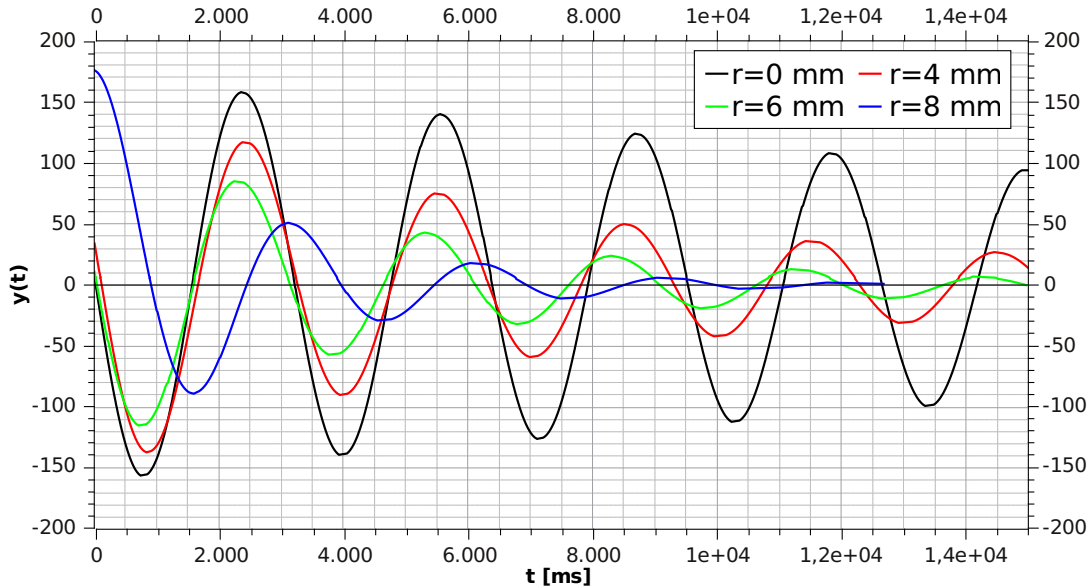


Abbildung 3: Verlauf der freien Schwingung bei verschiedenen Dämpfungen

Ähnlich zu eben werden nun das logarithmische Dekrement Λ und daraus die Dämpfung β bestimmt. Dazu wird der Quotient der Amplituden y_i und y_{i+1} je zweier aufeinanderfolgender Maxima gebildet, nach (2) erhält man daraus $\exp \Lambda_i$, daraus Λ_i . Anschließend wird über die Werte gemittelt und daraus $\bar{\Lambda}$ bestimmt.

Schließlich erhält man β nach

$$\beta = \frac{\omega_e \bar{\Lambda}}{2\pi}.$$

Der Fehler der Dekrementsbestimmung σ_{Λ_i} beträgt dabei

$$\sigma_{\Lambda_i} = \sqrt{\sigma_{y_i}^2 \left(\frac{\partial \Lambda_i}{\partial y_i} \right)^2 + \sigma_{y_{i+1}}^2 \left(\frac{\partial \Lambda_i}{\partial y_{i+1}} \right)^2} = \sqrt{\sigma_{y_i}^2 \left(\frac{1}{y_i} \right)^2 + \sigma_{y_{i+1}}^2 \left(-\frac{1}{y_{i+1}} \right)^2}.$$

Da hier $\sigma_{y_i} = \sigma_{y_{i+1}} = \sigma_y$ konstant, gilt

$$\sigma_{\Lambda_i} = \sigma_y \sqrt{\frac{1}{y_i^2} + \frac{1}{y_{i+1}^2}}.$$

Wird über die Werte von Λ gemittelt, erhält man das gewichtete Mittel

$$\bar{\Lambda} = \frac{\sum_i \frac{\Lambda_i}{\sigma_{\Lambda_i}^2}}{\sum_i \sigma_{\Lambda_i}^{-2}}$$

und dessen Fehler

$$\sigma_{\bar{\Lambda}} = \sqrt{\frac{1}{\sum_i \sigma_{\Lambda_i}^{-2}}}.$$

Der Fehler von β ist folglich

$$\sigma_{\beta} = \sqrt{\left(\frac{\omega_e}{2\pi} \sigma_{\bar{\Lambda}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\Lambda}}{2\pi} \sigma_{\omega_e}\right)^2}.$$

Tabelle 1 zeigt die errechneten Dekremente und entsprechende Dämpfungen mit Fehler.

r [mm]	n	T [ms]	ω_e [rad s ⁻¹]	$\bar{\Lambda}$	β [rad s ⁻¹]	ω_0 [rad s ⁻¹]
0	18	3080 ± 20	2.04 ± 0.02	0.127 ± 0.012	0.041 ± 0.004	2.04 ± 0.02
4	20	2970 ± 30	2.11 ± 0.02	0.359 ± 0.034	0.121 ± 0.012	2.12 ± 0.02
6	8	2980 ± 30	2.11 ± 0.02	0.592 ± 0.082	0.199 ± 0.028	2.12 ± 0.02
8	6	2900 ± 40	2.17 ± 0.03	1.10 ± 0.34	0.38 ± 0.12	2.20 ± 0.04

Tabelle 1: Die Ergebnisse des ersten Versuchteils

4.3 Ungedämpfte Eigenfrequenz

Die aus (1) ablesbare gedämpfte Eigenfrequenz beträgt

$$\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

mit der ungedämpften Eigenfrequenz ω_0 . Man erhält also

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_e^2 + \beta^2}$$

mit dem Fehler

$$\sigma_{\omega_0} = \sqrt{\sigma_{\omega_e}^2 \left(\omega_e \sqrt{\omega_e^2 + \beta^2}^{-1}\right)^2 + \sigma_{\beta}^2 \left(\beta \sqrt{\omega_e^2 + \beta^2}^{-1}\right)^2}.$$

Daraus ergeben sich die für die verschiedenen Dämpfungen ermittelten Werte in Tabelle 1 und daraus das gewichtete Mittel

$$\bar{\omega}_0 = (2.10 \pm 0.02) \text{ rad s}^{-1}$$

Das entspricht einer Abweichung von 3% gegenüber der Eigenfrequenz der freien, ungedämpften Schwingung $\omega_e = 2.04 \text{ s}^{-1}$.

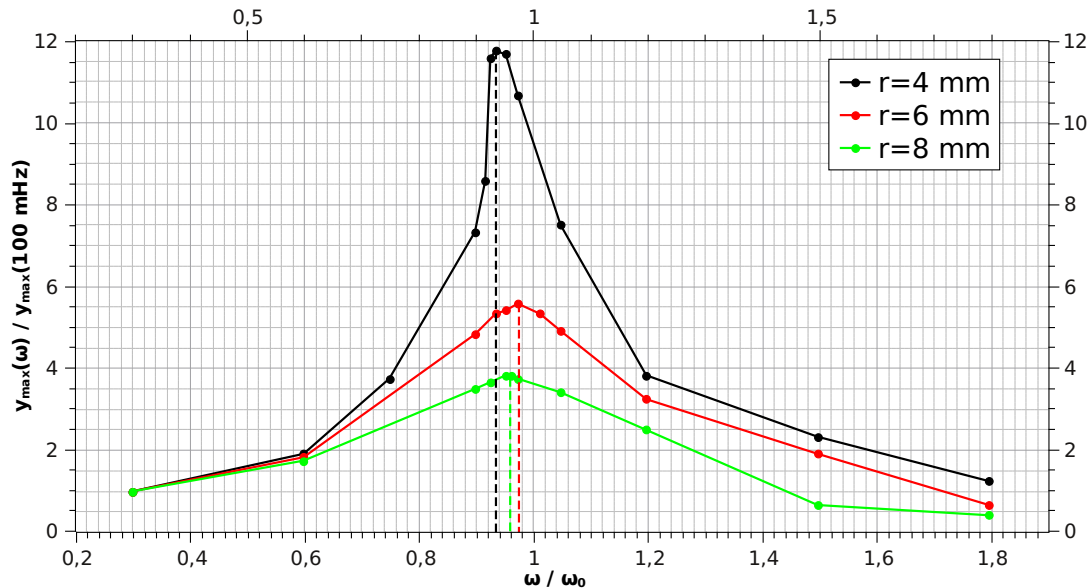


Abbildung 4: Resonanzkurven der verschiedenen Dämpfungen

4.4 Resonanzgang

Abbildung 4 zeigt die Resonanzkurven der erzwungenen Schwingungen für die Dämpfungen $r = 4 \text{ mm}$, 6 mm und 8 mm . Es wurden für sämtliche Messungen jeweils die maximale Amplitude ermittelt und gegen die normierte Frequenz $\frac{\omega}{\omega_0}$ aufgetragen. Die Amplitude wird anhand der Amplitude der Schwingung bei 100 mHz normiert. An den Maxima lassen sich die Resonanzfrequenzen bei den verschiedenen Dämpfungen ablesen.

4.5 Phasenverschiebung

Die Phasenverschiebung des Schwungrades zur Erregerfrequenz ist in Abbildung 5 zu sehen. Zur Erfassung der jeweiligen Phasenverschiebungen dient Programm A.1.3. Es ermittelt ausgehend vom letzten Nulldurchgang des Erregers den vorherigen Nulldurchgang des Schwungrades und berechnet aus der zeitlichen Differenz und der bekannten Erregerfrequenz die Phasenverschiebung.

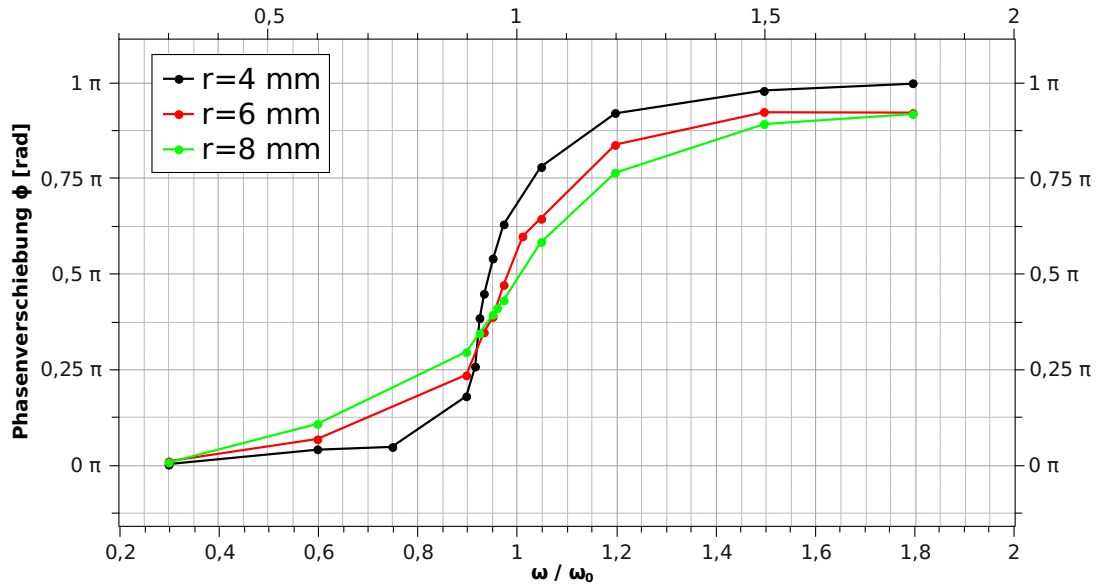


Abbildung 5: Phasenverschiebung des Schwungrades zur Erregerfrequenz

4.6 Vergleich zwischen theoretischen und experimentellen Werten

Tabelle 2 zeigt die aus (6) berechneten theoretischen Werte der Resonanzfrequenzen mit dem Fehler

$$\sigma_{\omega_r} = \sqrt{\sigma_{\omega_0}^2 \left(\bar{\omega}_0 \sqrt{\bar{\omega}_0^2 - 2\beta^2}^{-1} \right)^2 + \sigma_{\beta}^2 \left(2\beta \sqrt{\bar{\omega}_0^2 - 2\beta^2}^{-1} \right)^2}$$

und die praktisch ermittelten aus Abbildung 4. Hier wird als Fehler das Maximum der Abstände der Maximumfrequenz zu seinen Nachbarwerten angenommen.

r [mm]	β [rad s ⁻¹]	ω_r [rad s ⁻¹] theo.	ω_r [rad s ⁻¹] exp.	rel. Fehler
4	0.121 ± 0.012	2.09 ± 0.03	1.96 ± 0.04	6.2%
6	0.199 ± 0.028	2.08 ± 0.03	2.04 ± 0.09	1.9%
8	0.38 ± 0.12	2.03 ± 0.05	2.01 ± 0.02	1.0%

Tabelle 2: Theoretische und experimentelle Eigenfrequenzen im Vergleich

5 Diskussion

Die freien Schwingungen fallen wie erwartet je nach Dämpfung unterschiedlich stark exponentiell ab. Betrachtet man jedoch die gedämpften Eigenfrequenzen ω_e , so fällt

auf, dass diese entgegen der Erwartungen aus Gleichung (1) mit steigender Dämpfung zunehmen. Eventuell spielen hier noch andere, nicht erfasste Reibungsquellen eine Rolle, die sich nicht linear zur Winkelgeschwindigkeit oder Auslenkung verhalten. Der Reibungskoeffizient β , der sich aus dem Logarithmischen Dekrement und ω_e errechnet, steigt wie erwartet.

Die bestimmten Werte der ungedämpften Schwingung ω_0 schwanken stark, was auf die offensichtlich fehlerhaften Werte von ω_e zurückzuführen ist. Dafür spricht auch die Abweichung der Eigenfrequenz ω_e im Fall der freien Schwingung ohne Dämpfung zu $\bar{\omega}_0$ von 3%. Diese kommt zwar vermutlich auch aus anderen am Graphen erkennbaren Reibungsquellen, sollte aber im Vergleich wesentlich geringer sein.

Auch Abbildung 5 zeigt verschobene Phasenverschiebungen, die sich nicht wie erwartet bei $\frac{\omega}{\omega_0}$ bei einer Phasenverschiebung von $\frac{\pi}{2}$ kreuzen, sondern vorher. Dies deutet auf ein zu großes $\bar{\omega}_0$ hin.

Die Resonanzkurven der großen Dämpfungen in Abbildung 4 entsprechen sehr gut dem theoretischen Verlauf. Lediglich die Kurve der geringen Dämpfung scheint stark nach links verschoben zu sein und beschreibt so eine viel zu geringe Resonanzfrequenz. Betrachtet man den Vergleich dieser experimentell ermittelten Werte mit den theoretischen in Tabelle 2, so wird diese Abweichung an dem großen relativen Fehler von über 6% deutlich. Auch hier scheinen nicht erfasste Reibungsquellen als Verursacher wahrscheinlich, aber auch die Steuerung des Schrittmotors könnte fehlerhaft gewesen sein.

Insgesamt könnte auch die Schwungscheibe bei den ersten Messungen durch den langen Stillstand vorher noch nicht ganz rund gelaufen sein, sodass die Reibung mit der Zeit abnahm. Das könnte das Steigen der gedämpften Eigenfrequenzen mit zunehmender Dämpfung erklären. Ein solcher Effekt könnte durch nochmaliges Messen kompensiert werden, dazu fehlte jedoch die Zeit.

Eine große Schwierigkeit bei der Abschätzung der Fehler kommt außerdem daher, dass nichts über die Genauigkeit der Amplitudenmessung und der Steuerung des Schrittmotors bekannt ist.

A Anhang

A.1 Programmtext

A.1.1 Normierung

Listing 1: norm.py

```
import sys

col = int(sys.argv[2])
norm = int(sys.argv[3])
file = open(sys.argv[1])

for line in file:
    # Aufspalten in Zeit, Amplitude und Geschwindigkeit
    l = line.split(' ');

    # Spaltenwerte normieren
    l[col] = str(int(l[col]) + norm)

    # Erneut ausgeben
    for k in l:
        if(k[-1] == '\n'):
            print(k, end="")
        else:
            print(k+" ", end="")
```

A.1.2 Gedämpfte Eigenfrequenzen, Logarithmisches Dekrement, Reibungskoeffizient und ungedämpfte Eigenfrequenz

Listing 2: max.py

```
import sys
import math

file = open(sys.argv[1])

lastmax = -100000
lastmaxt = -100000
sum_maxdt = 0
sum_maxda = 0
nmax = 0

lastmin = 100000
```

```

lastmint = -100000
sum_mindt = 0
sum_minda = 0
nmin = 0

llt = -1
lla = -1
lt = -1
la = -1

dts = []
das = []

for line in file:
    l = line.split(' ')
    t = int(l[0])
    a = int(l[1])
    if (llt != -1 and la > lla and a < la and lt - lastmaxt
        >= 1000):
        print("max:" + str(lt))
        nmax += 1
        if (lastmaxt >= 0):
            sum_maxdt += lt - lastmaxt
            dts.append(lt-lastmaxt)
            sum_maxda += lastmaxt / la
            das.append(la)
            print("Beta:_" + str(lastmaxt/la))

        lastmaxt = lt
        lastmax = la

    if (llt != -1 and la < lla and a > la and lt - lastmint
        >= 1000):
        print("min:" + str(lt))
        nmin += 1
        if (lastmint >= 0):
            sum_mindt += lt - lastmint
            dts.append(lt-lastmint)
            sum_minda += lastmint / la
            print("Beta:_" + str(lastmint/la) + ",_minda
                :_" + str(sum_minda))

        lastmint = lt

```

```

lastmin = la

llt = lt
lla = la
lt = t
la = a

n = nmax+nmin-2

mw = (sum_mindt +sum_maxdt) / (nmax+nmin-2)

sumdts = 0

print("Num: " +str(n)+" ,len: " +str(len(dts)))
for i in range(0, n):
    sumdts += (dts[i] - mw)**2

alpha = (sum_maxda + sum_minda) / (nmax+nmin-2)
print("Anzahl_max: " + str(nmax))
print("Eigenfreq_max: " + str(sum_maxdt / (nmax-1)))
print("Anzahl_min: " + str(nmin))
print("Eigenfreq_min: " + str(sum_mindt / (nmin-1)))
print("MW: " + str(mw))
print("Fehler: " + str(math.sqrt( 1/(n*(n-1)) * sumdts)))
omega = 2*math.pi/(mw/1000)
somega = 2*math.pi/(mw*mw) *math.sqrt( 1/(n*(n-1)) * sumdts)
    *1000
print("Omega: " + str(omega))
print("Fehler: " + str(somega) )

lambdas = []
slambdas = []

for i in range(0, len(das)-1):
    lambdas.append(math.log(das[i]/das[i+1]))
    slambdas.append(2*math.sqrt( 1/(das[i]*das[i]) + 1/(das[i]
        +1)*das[i+1]) ))

sum1 = 0

for i in range(0, len(lambdas)):
    sum1 += lambdas[i]/slambdas[i]**2

```

```

sum2 = 0

for i in range(0, len(lambdas)):
    sum2 += 1/slambdas[i]**2

rlambda = sum1/sum2
srlambda = math.sqrt(1/sum2)

print("Lambda: \"+str(rlambda))
print("Fehler: \"+str(srlambda))

beta = omega/(2*math.pi) *rlambda
sbeta = math.sqrt( (omega/(2*math.pi) *srlambda)**2 + (rlambda
    /(2*math.pi) *somega)**2 )
print("Beta: \"+str(beta))
print("Fehler: \"+str(omega/(2*math.pi) *srlambda ))

omega0 = math.sqrt(omega*omega + beta*beta)
print("Omega0: \"+str(omega0))
print("Fehler: \"+str( math.sqrt( (somega*omega/omega0)**2 + (
    sbeta*beta/omega0)**2 ) ) )

```

A.1.3 Phasenverschiebung

Listing 3: phase.py

```

import sys
import math

files = sys.argv[2:]
omega0 = float(sys.argv[1])

for i in range(0, len(files), 3):
    fn = files[i]
    freq = int(files[i+1])
    null = int(files[i+2])

    f = open(fn)
    file = []

    for line in f:
        file.append(line)

```

```

for i in range(0, len(file)):
    l = file[i].split('_')
    j = i-1
    if int(l[0]) >= null:
        j = i-1
        break

amp = -1
lamp = -1
found = 0
time = []
while found < 2 :
    amp = int(file[j].split('_')[1])
    if amp == 0:
        time.append(int(file[j].split('_')[0]))
        found = found + 1

    j = j - 1

T = 1 / (freq / 1000)
phi0 = 2*math.pi * (null - time[0]) / 1000 / T
phi1 = 2*math.pi * (null - time[1]) / 1000 / T

print(str(int(freq) / 1000 / (omega0/(2*math.pi)) ) + "_" +
        str(math.pi - phi0) ) # + " " + str(math.pi*2- phi1))

```